Démonstrations au programme du premier devoir en classe

1 Divisibilité

Théorème :
Les affirmations suivantes sont équivalentes :
(b divise a) $\iff$ ($-b$ divise a) $\iff$ ($-b$ divise $-a$) $\iff$ (b divise $-a$)

Théorème : Transitivité(s)
Pour trois entier a, b et c.
- Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
- Si a divise b et c, alors a divise toute combinaison $bu + cv$ avec u et v deux entiers.

Remarque : Pour $u = v = 1$ on obtient : "Si a divise deux nombres, alors il divise leur somme".
Et pour $u = 1$, $v = -1$, on obtient : : "Si a divise deux nombres, alors il divise leur différence".

2 Division Euclidienne

3 Congruence dans $\mathbb{Z}$

Théorème :

$$a \equiv b[n] \iff n \text{ divise } (b - a)$$

Démonstration : Au programme, voir dans le manuel **Remarque :**

Théorème : Quelques résultats remarquables.
Pour n entier naturel, a, b et c des entiers relatifs.

- (transitivité)
  On suppose que $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$, alors $a \equiv c[n]$. On en déduit que : n divise

Démonstration : Au programme

- (transitivité)
  On suppose que $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$.

  Donc n divise $(b - a)$ et $(c - b)$.
  On en déduit que n divise la somme $(b - a) + (c - b) = c - a$
  Donc $a \equiv c[n]$.

Théorème : Congruence et opérations
a,b,c et d sont des entiers, n et p sont des entiers naturels.

L'addition est compatible avec les congruences .
Si $a \equiv b[n]$ alors $a + c \equiv b + c[n]$
Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$

La multiplication est compatible avec les congruences .
Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $ac \equiv bd[n]$

Initialisation .
On sait que $a \equiv b[n]$ donc $a^1 \equiv b^1[n]$.
$\mathcal{H}_1$ est vraie.

Hérédité .
Soit p un entier naturel non nul tel que $\mathcal{H}_p$ est vraie, démontrons que $\mathcal{H}_{p+1}$ l'est également.

On sait que :

$$a \equiv b[n] \text{ et } a^p \equiv b^p[n]$$

Donc en multipliant membre à membre les congruences (propriété précédente du théorème), on obtient :

$$a \times a^p \equiv b \times b^p[n]$$

D'où

$$a^{p+1} \equiv b^{p+1}[n]$$

Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

Concusion .
La propriété $\mathcal{H}_p$ est vraie pour $p = 1$ et héréditaire pour $p \geqslant 1$ donc, par récurrence la propriété $\mathcal{H}_p$ est vraie pour tout p entier naturel non nul.