

63,64 page 153

Exercices d'entraînement63, 64, 66 p 153 et M3 page 160

$$\boxed{63} \quad 78 \equiv 1[7] \text{ donc } 78^{115} \equiv 1^{115}[7]$$

$$\underline{78^{115} \equiv 1[7]}$$

$$92 = 13 \times 7 + 1$$

$$\text{Donc } 92 \equiv 1[7]$$

$$\text{par suite } 92^{23} \equiv 1^{23}[7]$$

$$\underline{92^{23} \equiv 1[7]}$$

$$106 = 3 \times 35 + 1$$

$$= 15 \times 7 + 1$$

$$\text{Donc } 106 \equiv 1[7]$$

$$\text{dr. } 106^{35} \equiv 1^{35}[7]$$

$$\text{Donc } 106^{35} \equiv 1[7]$$

Des 3 résultats précédents on déduit que

$$78^{115} + 92^{23} + 106^{35} \equiv 3[7]$$

$$\boxed{64} \quad A = 877 + 59^{43}$$

$$\textcircled{a} \quad 59 = 56 + 3$$

$$= 8 \times 7 + 3 \quad \text{Donc } 59 \equiv 3[7].$$

$$3^2 = 9 \equiv 2[7] \quad \text{Donc } 3^6 \equiv 2^3[7]$$

$$3^6 \equiv 1[7]$$

$$\textcircled{b} \quad 43 = 6 \times 7 + 1$$

$$\text{Donc } 3^{43} = (3^6)^7 \times 3$$

$$\text{On en déduit que } 3^{43} \equiv 1^7 \times 3[7] \text{ et } 3^{43} \equiv 3[7]$$

$$c) \quad 59 \equiv 3 [7]$$

$$\text{donc } 59^{43} \equiv 3^{43} [7]$$

$$\text{or, on sait que : } 3^{43} \equiv 3 [7],$$

$$\text{Donc } \underline{59^{43} \equiv 3 [7]}$$

$$\begin{array}{r|l} 877 & 7 \\ 17 & 125 \\ 37 & \\ 2 & \end{array}$$

$$\text{Donc } 877 = 7 \times 125 + 2$$

$$\underline{877 \equiv 2 [7]}$$

Des deux résultats soulignés, on déduit que :

$$A \equiv 3 + 2 [7]$$

$$\underline{A \equiv 5 [7]}$$

165] Réponse non rédigée

$$30 \equiv 2 [7]$$

$$2^5 = 32 \equiv -3 [7]$$

$$\text{donc } 2^{10} \equiv 9 [7]$$

$$2^{10} \equiv 2 [7]$$

$$30^{10} \equiv 2 [7]$$

$$125 = 140 - 14 - 1$$

$$\text{Donc } 125 \equiv -1 [7]$$

$$125^{17} \equiv (-1)^{17} [7]$$

$$\equiv -1 [7]$$

Donc

$$A \equiv -2 [7]$$

$$\text{or } A \equiv 5 [7]$$

Le reste cherché est donc 5

113p160

113 page 160① On note $N = \overline{abcdabcd}$

$$\begin{aligned}
 N &= a(10^7 + 10^3) + b(10^6 + 10^2) + c(10^5 + 10^1) + d(10^4 + 1) \\
 &= (10^4 + 1)[10^3a + 10^2b + 10c + d] \\
 &= 10001 \overline{abcd}
 \end{aligned}$$

$$10001 = 73 \times 137$$

Donc 137 divise 10001

comme 10001 divise N , on en déduit que 137 divise N .

② a) $5n+3 = 2(2n+3) + n-3$

* si $n \geq 3$, alors $n-3 \geq 0$ et $n-3 < 2n+3$
 donc $q = 2n+3$ et $r = n-3$

* $5n+3 = 2n+3 + 3n$

si $n < 3$, alors en ajoutant $2n$ aux deux membres de l'inégalité, on obtient : $3n < 2n+3$.

On pose donc $q=1$ et $r=3n$.b) Soit n un entier naturel tel que $(2n+3)$ divise $(5n+3)$.

1^{er} cas si $n \geq 3$ alors le reste de la division de $5n+3$ par $2n+3$ est $n-3$.

Donc $n-3 = 0$ et $n=3$

$$\begin{array}{l}
 2n+3 = 9 \\
 5n+3 = 18
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2n+3 = 9 \\ 5n+3 = 18 \end{array}} \right\} \text{3 est bien solution.}$$

2^{ième} cas si $m < 3$ alors le reste de la division de $5m+3$ par $2m+3$ est $3m$
 donc $3m = 0$
 i.e. $m = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 2m+3=3 \\ 5m+3=3 \end{array} \right\} \text{Donc } 0 \text{ est solution.}$$

Deux solutions : 0 et 3

$$(3) (a) \quad m^2 + 3m + 7 - (m+1)(m+2) = m^2 + 3m + 7 - (m^2 + 3m + 2)$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} m+1 \text{ divise } m^2 + 3m + 7 \\ m+1 \text{ divise } m+1 \end{array} \right\} = 5$$

~~Donc : $m^2 + 3m + 7 - (m+2)(m+1)$ divise $m^2 + 3m + 7$~~

~~Par suite 5 divise $m^2 + 3m + 7$.~~

Donc $(m+1)$ divise $m^2 + 3m + 7 - (m+2)(m+1) = 5$

(c) Etude des valeurs possibles

$m+1$	m	$m^2 + 3m + 7$	Vérification
-5	-6	—	$m \notin \mathbb{N}$
-1	-2	—	$m \notin \mathbb{N}$
1	0	7	1 divise 7
5	4	35	5 divise 35

Il y a deux solutions : 0 et 4.

④ a) ~~2^2 = 4~~

$$2^2 = 4 ; 2^4 = 16 = 15 + 1$$

Donc $2^4 \equiv 1 [5]$

⑤ $2^4 \equiv 1 [5]$ donc $(2^4)^k \equiv 1^k [5]$

$$2^{4k} \equiv 1 [5]$$

par suite : $2^{4k+n} \equiv 2^n [5]$

⑥ On note $m = 4k + r$ la division euclidienne de m par 4. On a donc $r \in \{0; 1; 2; 3\}$.

de ⑤, on déduit que $2^m \equiv 2^r [5]$.

D'où les résultats suivants.

Reste de m modulo 4	Reste de 2^m modulo 5
0	1
1	2
2	4
3	3

⑦ $17 = 15 + 2$ donc $17 \equiv 2 [5]$

or $17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2} [5]$

d'où $17^{4p+2} \equiv 4 [5]$ (Résultat dec)

$32 = 30 + 2$ donc $32 \equiv 2 [5]$

$2^{4p+3} \equiv 3 [5]$ (Résultat dec)

d'où $32^{4p+3} \equiv 3 [5]$

Conclusion : $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3 [5] \equiv 0 [5]$

59 page 153

(a) $113 = 12 \times 9 + 5$

Donc $113 \equiv 5[12]$

113 heures après avoir indiqué 2h, l'horloge indique $2 + 5 = 7h$.

(b) $156 = 120 + 36 = 12 \times 13$

Donc $156 \equiv 0[12]$.

156h plus tard l'horloge indique la même heure, ici 6h.

60 page 153

(a) $5^2 = 25 = 26 - 1 = 2 \times 13 - 1$

donc $5^2 \equiv -1[13]$

en élevant au carré, on obtient :

$$(5^2)^2 \equiv (-1)^2 [13]$$

$$5^4 \equiv 1[13]$$

(b) Soit n un entier naturel, on a : $5^{4n} = (5^4)^n$. en élevant les membres de la relation de congruence précédente à la puissance n , on obtient :

$$5^{4n} \equiv 1^n[13]$$

$$5^{4n} \equiv 1[13]$$

61 page 153

$$x \equiv -3[5] \iff x - (-3) \iff 0[5]$$

$$\iff x + 3 \iff 0[5]$$

Les solutions de l'équation sont donc les entiers naturels x tels que $x + 3$ est un multiple de 5. x est solution si, et seulement si, il existe un entier k tel que : $x + 3 = 5k$

autrement dit :

 x est solution si, et seulement si, il existe un entier k tel que : $x = -3 + 5k$

$$-3 + 5k \geq 0 \iff 5k \geq 3$$

$$\iff k \geq \frac{3}{5}$$

il faut donc que k soit un entier naturel non nul.

$$S = \{-3 + 5k; k \in \mathbb{N}^*\}$$

62 page 153

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4 \iff -1[7] \end{array} \right.$$

$$x + 4 \iff -1[7] \equiv x + 5 \iff 0[7]$$

il existe un entier k tel que $x + 5 = 7k$ il existe un entier k tel que $x = 7k - 5$

En utilisant l'encadrement du système, déterminons les valeurs de k qui nous fournissent des solutions.

$$\begin{aligned} -50 \leq 7k - 5 \leq 100 &\iff -45 \leq 7k \leq 105 && (\text{En ajoutant 5 à chaque membre}) \\ &\iff \frac{-45}{7} \leq k \leq \frac{105}{7} && (\text{En divisant par 7 chaque membre (7 est positif)}) \end{aligned}$$

$$\frac{-45}{7} \approx -6,4 \text{ et } \frac{105}{7} = 15$$

Donc k doit être compris entre -6 et 15.

$$S = \{7k - 5; k \in \llbracket -6; 15 \rrbracket\}$$