

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Cours 1

Questions flash

À l'oral

- 20** Énoncer la liste des diviseurs de 28 dans $\mathbb{N}$.
- 21** Louise affirme qu'il y a 15 multiples de 7 entre -50 et 50 .
A-t-elle raison ? Justifier.
- 22** Citer un nombre compris entre 20 et 50 qui est à la fois divisible par 3 et 5.
- 23** Déterminer des nombres entiers relatifs a , b , c tels que a divise bc sans que a divise b et a divise c .
- 24** a) On appelle **diviseur strict** d'un nombre entier naturel tout diviseur positif autre que le nombre lui-même.
Déterminer les diviseurs stricts de 220.
b) On appelle **nombres amiables** deux nombres entiers naturels tels que chacun d'entre-eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Vérifier que 220 et 284 sont des nombres amiables.
c) On appelle **nombre parfait** un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts.
Déterminer deux nombres parfaits inférieurs à 30.
- On ne connaît pas de formule ou de méthode générale pour déterminer les nombres amiables (ou amicaux). Des recherches par ordinateur ont permis de trouver de tels nombres jusqu'à 12 chiffres, mais on ne sait pas s'il en existe une infinité.
- 25** n désigne un nombre entier naturel $n \geq 2$, on pose : $A = n^4 - 1$.
Démontrer que $n-1$, $n+1$, n^2+1 sont des diviseurs de A .
- 26** Démontrer que la somme de trois nombres entiers relatifs consécutifs est divisible par 3.
Conseil : trois nombres entiers relatifs consécutifs peuvent s'écrire n , $n+1$, $n+2$ ou $n-1$, n , $n+1$...
- 27** a et b désignent deux nombres entiers relatifs.
a) Développer $(a+b)^3$.
b) Démontrer que 3 divise $(a+b)^3$ si, et seulement si 3 divise $a^3 + b^3$.

- 28** k désigne un nombre entier naturel.
On pose $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$.
a) Déterminer la valeur de la combinaison linéaire $4a - 3b$.
b) En déduire que les seuls diviseurs positifs possibles et communs à a et b sont 1 et 5.
- 29** k désigne un nombre entier naturel.
On pose $a = 6k + 5$ et $b = 8k + 3$.
Démontrer que les seuls diviseurs possibles et communs à a et b sont 1 et 11.
- 30** a et n désignent des nombres entiers relatifs.
a) Démontrer que si a divise $3n - 5$ et a divise $2n + 3$, alors a divise 19.
Conseil : utiliser une combinaison linéaire de a et b .
b) La réciproque est-elle vraie ?
- 31** Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels que $n + 8$ est un multiple de n .
- 32** n désigne un nombre entier relatif.
a) Démontrer que $n + 3$ divise $n + 10$ si, et seulement si, $n + 3$ divise 7.
b) En déduire les valeurs de n telles que $n + 3$ divise $n + 10$.
- 33** n désigne un nombre entier relatif.
a) Démontrer que $n + 7$ divise $3n + 1$ si, et seulement si, $n + 7$ divise 20.
b) En déduire les valeurs de n telles que $n + 7$ divise $3n + 1$.
- 34** Déterminer les nombres entiers relatifs n tels que $3n + 1$ divise $n + 2$.
- 35** Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que : $x^2 - y^2 = 13$.
- 36** Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que : $x^2 - 2xy = 15$.
- 37** n est un nombre entier naturel relatif tel que $n - 4$ est divisible par 5.
Démontrer que $n^2 - 1$ est également divisible par 5.
- 38** n est un nombre entier naturel relatif tel que $n - 2$ est divisible par 7.
Démontrer que $n^3 - 1$ est également divisible par 7.