

Exercice 3 $ZERT$ est-il un parallélogramme ?

$$Z(31; -24), \quad E(53; 27), \quad R(82; 32), \quad T(60; -17)$$

Pour étudier $ZERT$, calculons les coordonnées des milieux des deux diagonales et comparons les.

Soit N le milieu de $[TE]$.

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_T + x_E}{2} \\ &= \frac{53 + 60}{2} \\ &= \frac{113}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{y_T + y_E}{2} \\ &= \frac{27 + (-17)}{2} \\ &= \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

Donc

$$N\left(\frac{113}{2}; 5\right)$$

Soit M le milieu de $[ZR]$.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_Z + x_R}{2} \\ &= \frac{31 + 82}{2} \\ &= \frac{113}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_Z + y_R}{2} \\ &= \frac{-24 + 32}{2} \\ &= \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Donc

$$M\left(\frac{113}{2}; 4\right)$$

M et N ont des coordonnées différentes, donc ils ne sont pas confondus.

Le quadrilatère $ZERT$ a ses diagonales qui n'ont pas le même milieu donc $ZERT$ n'est pas un parallélogramme.

Exercice 4 Démontrer que $RECT$ est un rectangle.

$$R(3; 5), \quad E(1; -4), \quad C(-26; 2), \quad T(-24; 11)$$

Pour démontrer que $RECT$ est un rectangle, on peut comparer les coordonnées des milieux des diagonales pour démontrer que c'est un parallélogramme puis les longueurs des diagonales pour justifier que ce parallélogramme est un rectangle.

Soit N le milieu de $[RC]$.

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_R + x_C}{2} \\ &= \frac{3 + (-26)}{2} \\ &= \frac{-23}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_N &= \frac{y_R + y_C}{2} \\ &= \frac{5 + 2}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$N\left(\frac{-23}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

Soit M le milieu de $[ET]$.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_E + x_T}{2} \\ &= \frac{1 + (-24)}{2} \\ &= \frac{-23}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_E + y_T}{2} \\ &= \frac{-4 + 11}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$M\left(\frac{-23}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

M et N ont les mêmes coordonnées. Donc les diagonales de $RECT$ se coupent en leur milieu et $RECT$ est un parallélogramme.

$$\begin{aligned} RC &= \sqrt{(x_C - x_R)^2 + (y_C - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(-26 - 3)^2 + (2 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(-29)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{850} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TE &= \sqrt{(x_E - x_T)^2 + (y_E - y_T)^2} \\ &= \sqrt{(1 - (-24))^2 + (-4 - 11)^2} \\ &= \sqrt{(25)^2 + (-15)^2} \\ &= \sqrt{850} \end{aligned}$$

Donc $TE = RC$.

Le parallélogramme $RECT$ a ses diagonales de même longueur, donc c'est un rectangle.

Exercice 5 Démontrer que $CARE$ est un carré.

$$C(-4; -3), \quad A(1; -6), \quad R(4; -1), \quad E(-1; 2)$$

Pour démontrer que $CARE$ est un carré, on peut :

- vérifier que ses quatre côtés ont la même longueur pour justifier que c'est un losange,
- utiliser la longueur d'une diagonale pour tester la présence d'un angle droit avec l'égalité de Pythagore.

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(1 - (-4))^2 + (-6 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AR &= \sqrt{(x_R - x_A)^2 + (y_R - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (-1 - (-6))^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RE &= \sqrt{(x_E - x_R)^2 + (y_E - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - 4)^2 + (2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE &= \sqrt{(x_E - x_C)^2 + (y_E - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - (-4))^2 + (2 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

Les quatre côtés de $CARE$ ont la même longueur $\sqrt{34}$ donc $CARE$ est un losange.

$$\begin{aligned} CR &= \sqrt{(x_R - x_C)^2 + (y_R - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(4 - (-4))^2 + (-1 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{68} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CA^2 + AR^2 &= (\sqrt{34})^2 + (\sqrt{34})^2 \\ &= 34 + 34 = 68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CR^2 &= (\sqrt{68})^2 \\ &= 68 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } CA^2 + RA^2 = CR^2$$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RAC est rectangle en A et par suite le losange $CARE$ qui a un angle droit est un carré .